11 恒定磁场

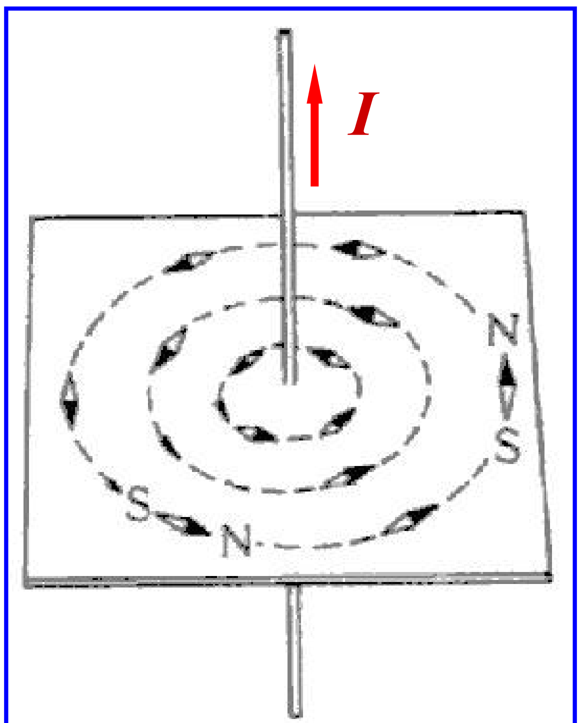
任课教师　曾灏宪

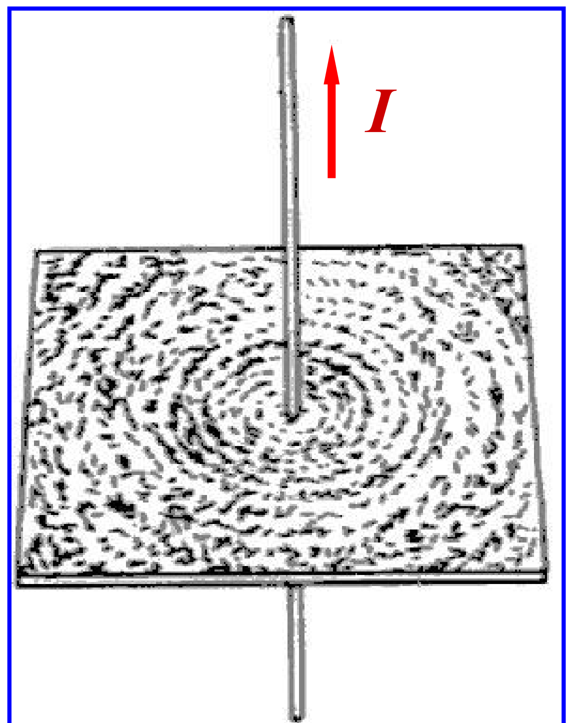
中原工学院　理学院

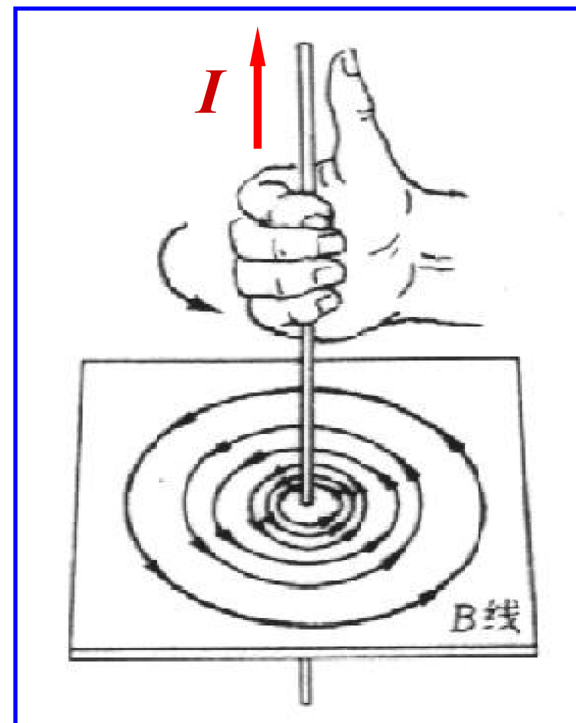
11.5 磁通量　磁场的高斯定理

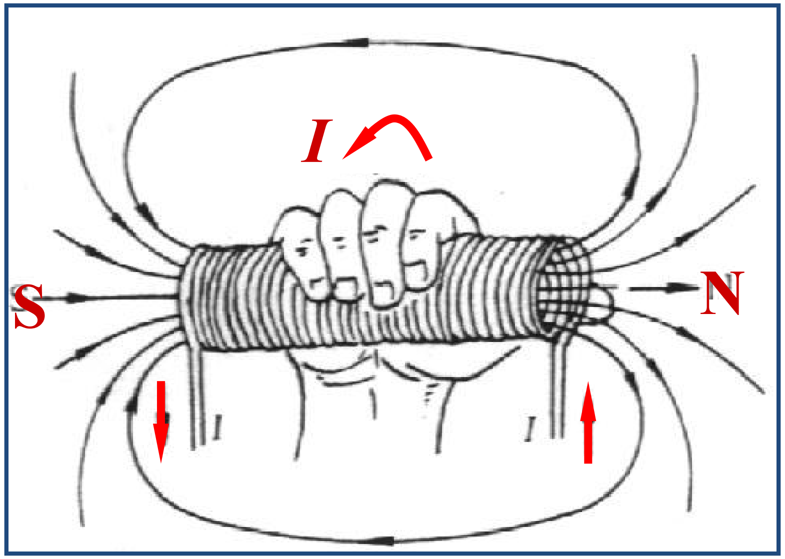
一　磁感线

规定：曲线上每一点，的切线方向就是该点的磁感强度 ***B*** 的方向，曲线的疏密程度表示该点的磁感强度 ***B*** 的大小.







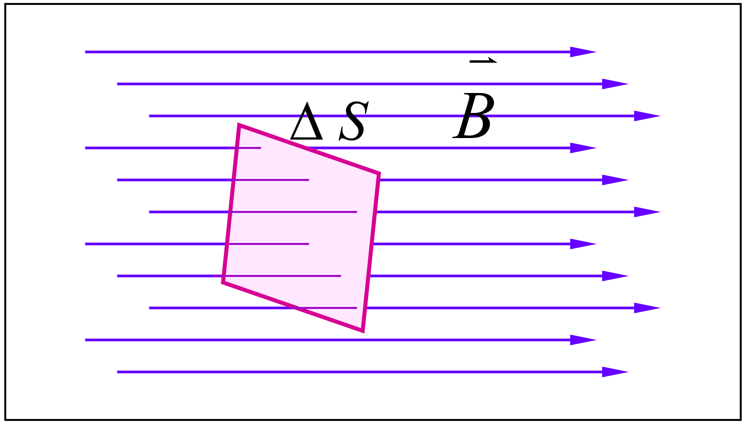


特点：

1. 闭合
2. 互不相交
3. 与载流回路互相套联

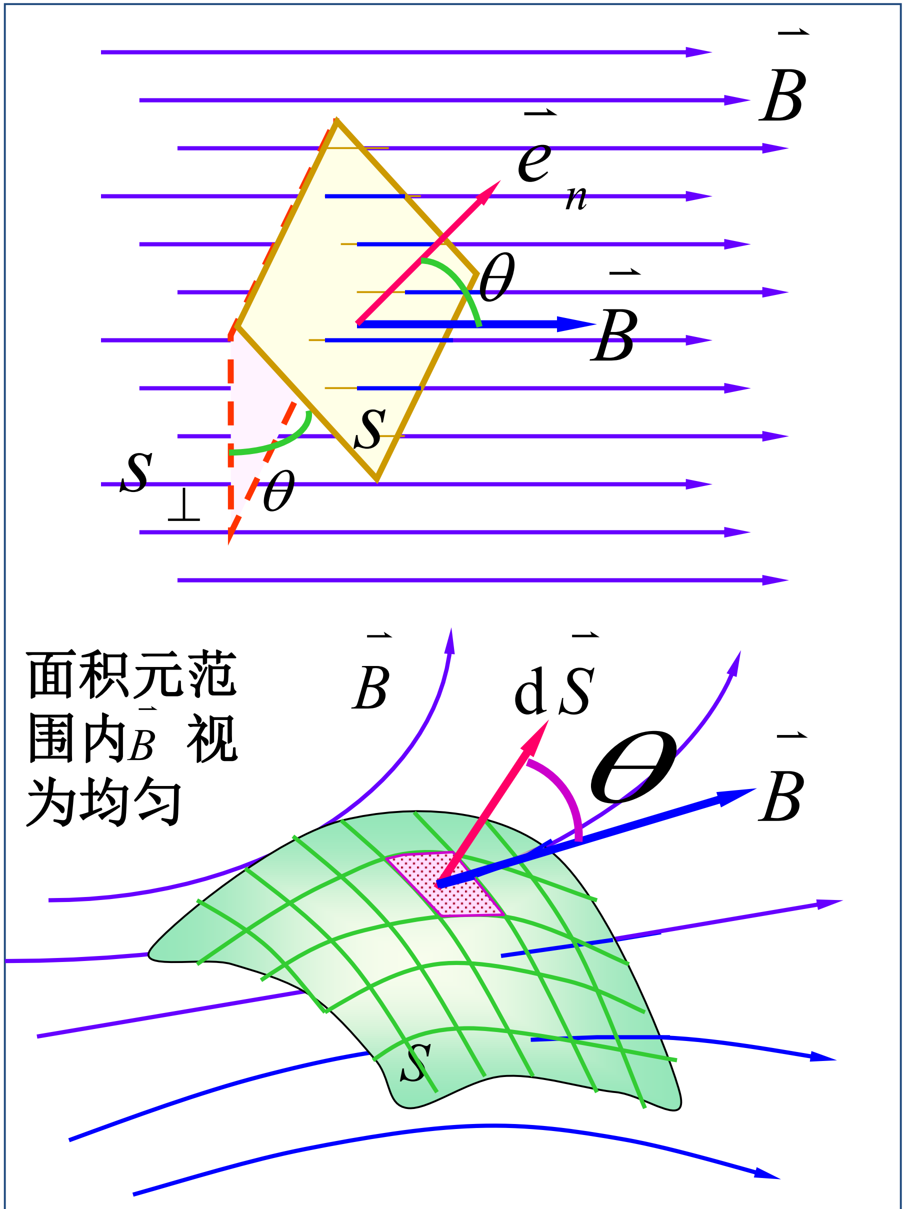
二　磁通量　磁场的高斯定理

磁通量　通过磁场中某一给定面的磁感应线的总条数叫做通过该面的磁通量。



$$B = \frac{\Delta N}{\Delta S}$$

磁场中某点处①垂直 $\vec{B}$ 矢量的②单位面积上通过的③磁感线数目等于该点 $\vec{B}$ 的数值.



$$\Phi = BS\cos\theta = BS_\perp$$

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot\vec{e}_n S$$

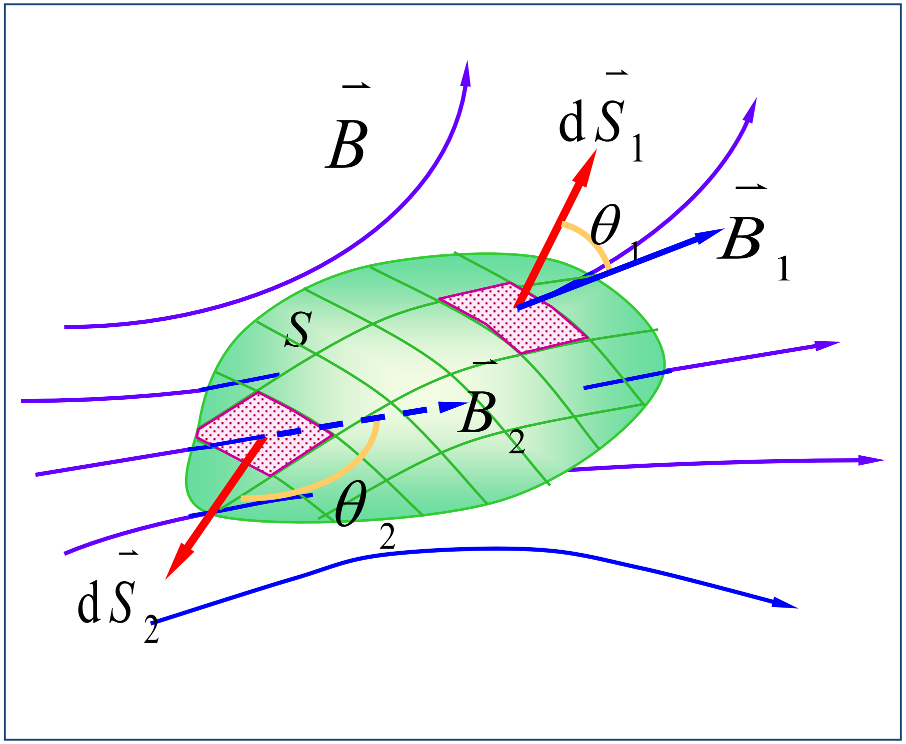
$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$\boxed{\Phi = \int_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

单位：韦伯

$$1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{T}\times 1\,\mathrm{m}^2$$



对封闭曲面，规定外法向为正

$$\oint_S B\cos\theta \mathrm{d}S = 0$$

磁感应线闭合成环，无头无尾，不存在磁单极。

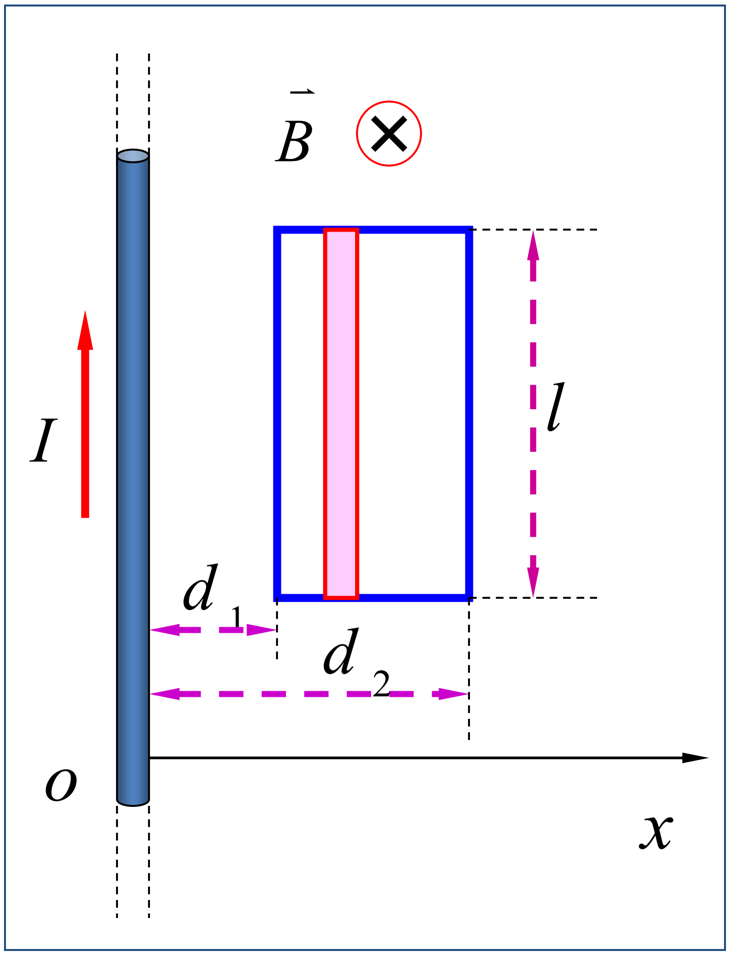
磁场的高斯定理

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

物理意义：通过任意闭合曲面的磁通量必等于零

（磁场是无源的）

例 如图载流长直导线的电流为 I，试求通过矩形面积的磁通量.



分析 先求 $\vec{B}$，对非均匀磁场先给出 $\mathrm{d}\Phi$ 后积分求 Φ.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \vec{B} \,//\, \vec{S}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\,\mathrm{d}x$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

对比

比较	高斯定理	环路定理
静电场	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$ 有源场	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 保守场（有势场）
稳恒磁场	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 无源场	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = ?$ 性质？

大学物理（下）

11 恒定磁场

11.6 安培环路定理

一　磁场的安培环路定理

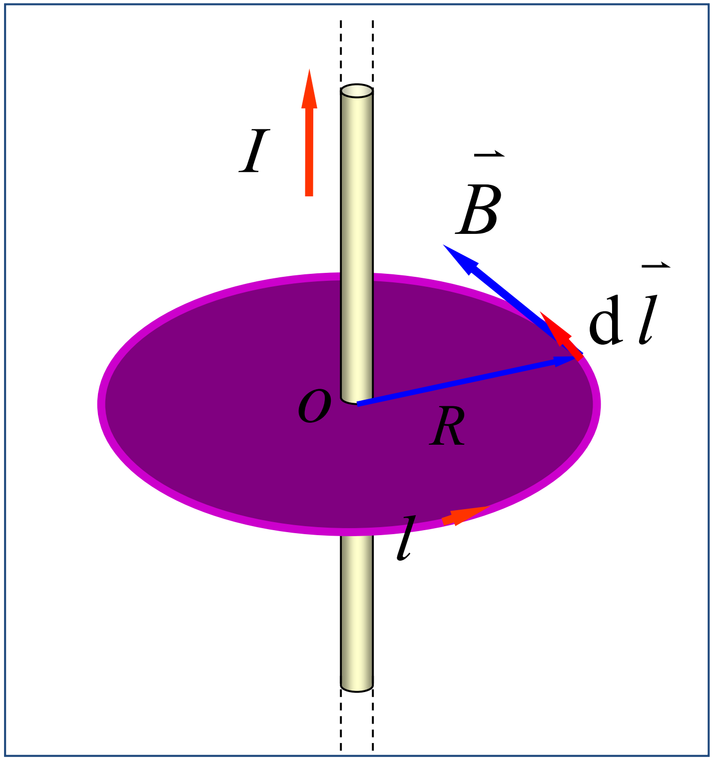
特例： 无限长载流长直导线的磁感强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

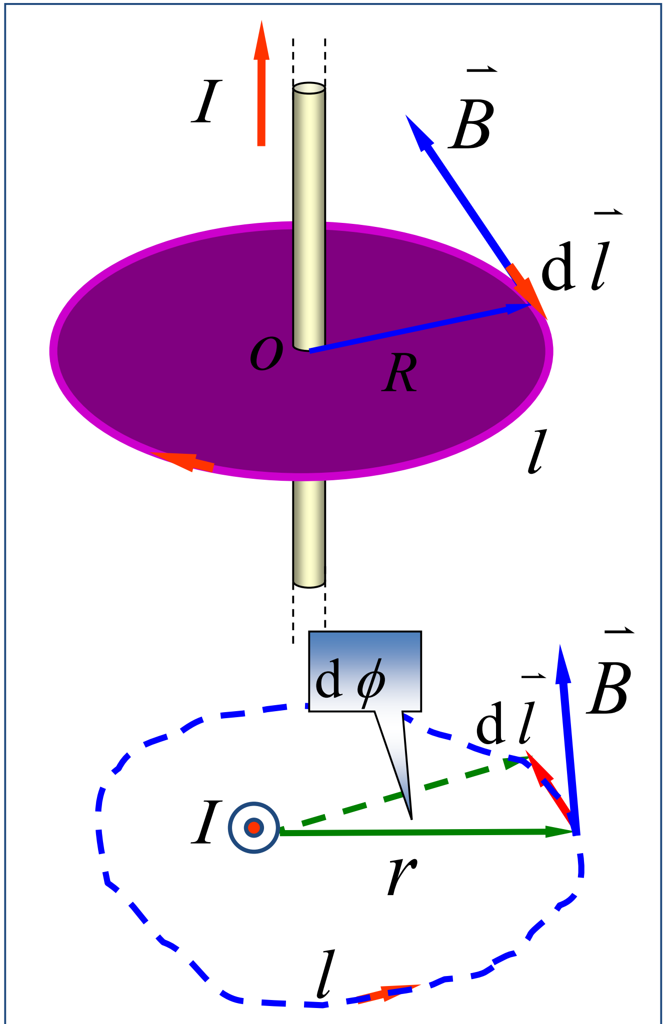
$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint\frac{\mu_0 I}{2\pi R}dl$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint_l dl$$

$$\boxed{\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I}$$



设闭合回路 l 为圆形回路(l 与 I 成右螺旋)



l 与 I 成右螺旋

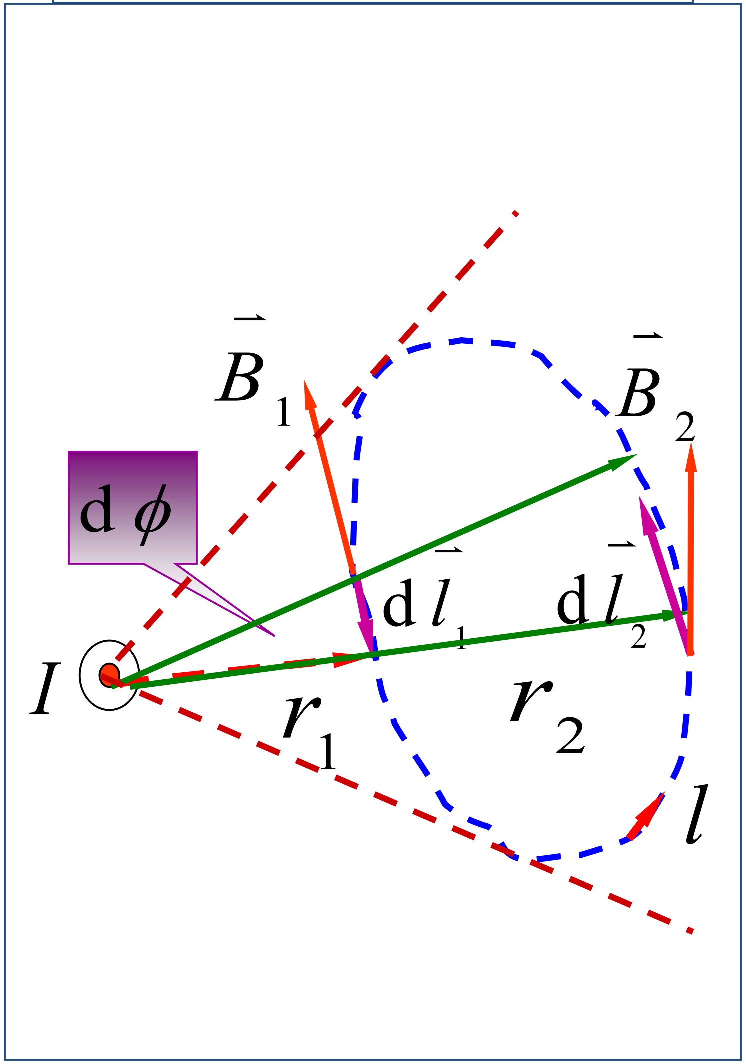
规定：当电流流向与积分路径的绕行方向成右手螺旋关系时，电流为正；反之为负.

若回路绕向化为顺时针时，则

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint -\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathrm{d}l = -\mu_0 I$$

对任意形状的回路也有类似的结论，但是证明较为复杂。可参考中国知网上的一些文献。

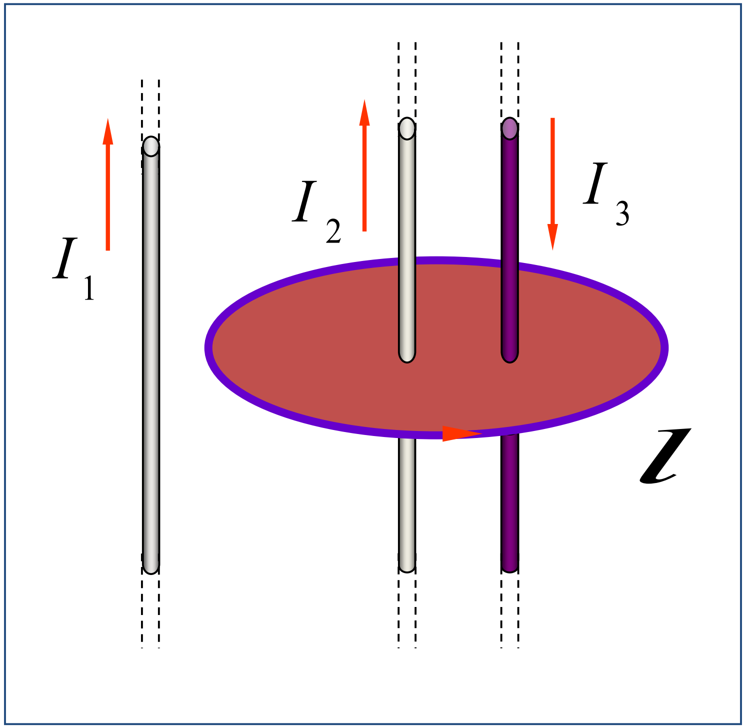
电流在回路之外



$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

多电流情况



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_3)$$

以上结果对任意形状的闭合电流（伸向无限远的电流）均成立.

安培环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

稳恒磁场的安培环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(穿过L)} I_i}$$

稳恒磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任意闭合路径 L 的线积分（环流）等于穿过闭合路径的电流的代数和与真空磁导率的乘积。

强调

①成立条件：稳恒电流的磁场（稳恒磁场、静磁场）

$\left.\begin{array}{l}\text{随时间变化的磁场}\\ \text{一段电流的磁场}\end{array}\right\}$ 均不适用！

② L：场中任一闭合回路 —— 安培环路

$\vec{B}$：环路上各点处的总磁感应强度

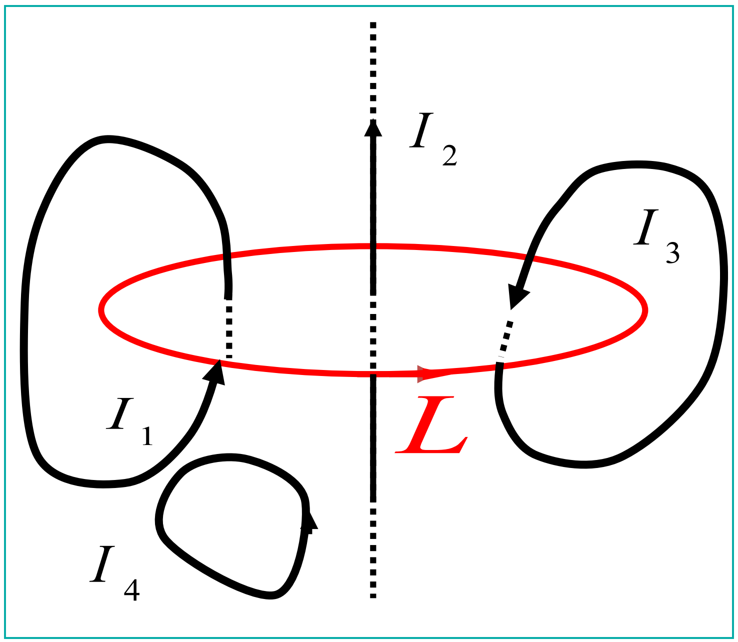
（包括 L 内和 L 外的所有电流的贡献）

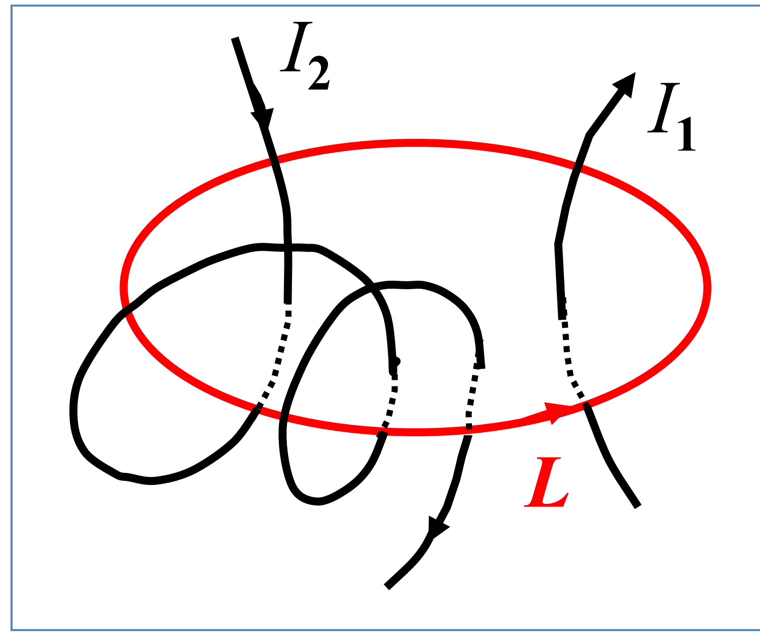
$\sum\limits_{(穿过L)} I_i$：穿过以 L 为边界的闭合曲线包围电流的代数和

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(穿过L)} I_i$$

③ 电流 I_i 的正负规定：环路 L 的绕行方向与电流 I_i 方向服从右手法则时，电流取正；相反则电流 取负。

例：





$$\sum_{(穿过L)} I_i = I_1 + I_2 - I_3$$

$$\sum_{(穿过L)} I_i = I_1 - 3I_2$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过} L)} I_i}$$

④ 穿过 L 的电流：对 $\vec{B}$ 和 $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 均有贡献

不穿过 L 的电流：对 L 上各点 $\vec{B}$ 有贡献

对 $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 无贡献

$\vec{B}$ ：与空间所有电流有关

$\vec{B}$ 的环流：只与穿过环路的电流代数和有关

安培环路定理揭示磁场是非保守场（无势场，涡旋场）

例　取一闭合积分回路L，使三根载流导线穿过它所围成的面，现改变三根导线之间的相互间隔，但不越出积分回路，则：　（　　）

(1) 回路L内的$\sum I$不变，L上各点的$\vec{B}$不变.

★(2) 回路L内的$\sum I$不变，L上各点的$\vec{B}$改变.

(3) 回路L内的$\sum I$改变，L上各点的$\vec{B}$不变.

(4) 回路L内的$\sum I$改变，L上各点的$\vec{B}$改变.

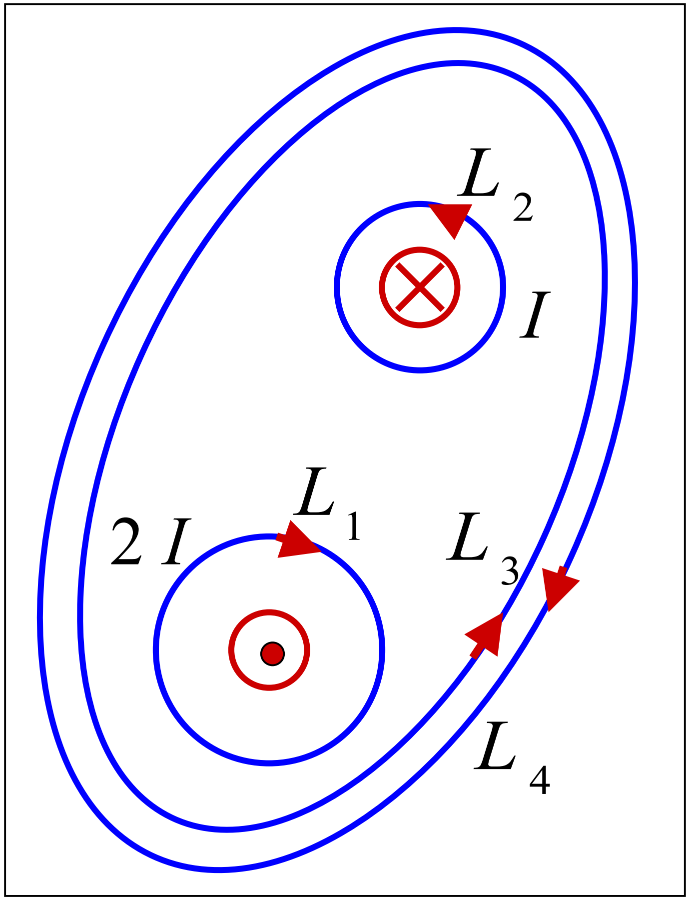
例 如图，流出纸面的电流为$2I$，流进纸面的电流为I，则下述各式中哪一个是正确的？（ ）

(1) $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\mu_0 I$

(2) $\oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

(3) $\oint_{L_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$

★(4) $\oint_{L_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$



比较	高斯定理	环路定理
静电场	$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 有源场	$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ 保守场（有势场）
稳恒磁场	$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ 无源场	$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum\limits_{（穿过 L）} I_i$ 非保守场（无势场）

二　安培环路定理的应用

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$ → 求解某些具有**对称**分布的静电场

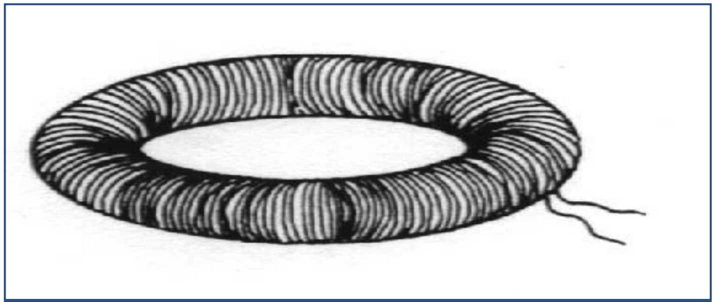
$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(穿过\ L)} I_i$$ → 求解某些具有**对称**性的磁场分布

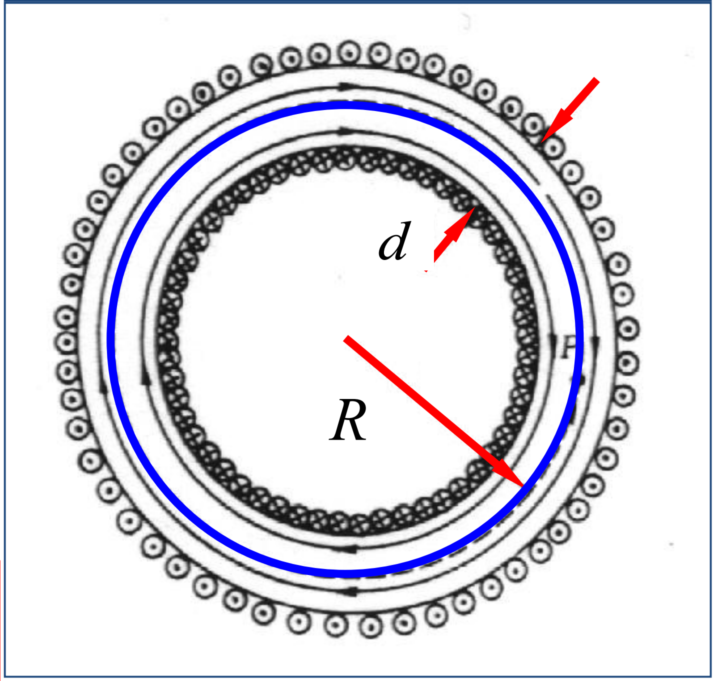
适用条件：闭合稳恒电流的磁场

求解条件：电流分布(磁场分布)具有某些对称性，以便可以找到**恰当**的安培环路 L，使 $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 能积出，从而方便地求解 $\vec{B}$ 。

三　安培环路定理的应用举例

例1　求载流螺绕环内的磁场





分析　1）对称性分析：环内 $\vec{B}$ 线为同心圆，环外 $\vec{B}$ 为零.

2）选回路.

解：选如图所示的安培环路，由安培环路定理，

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 NI$$

又

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi RB$$

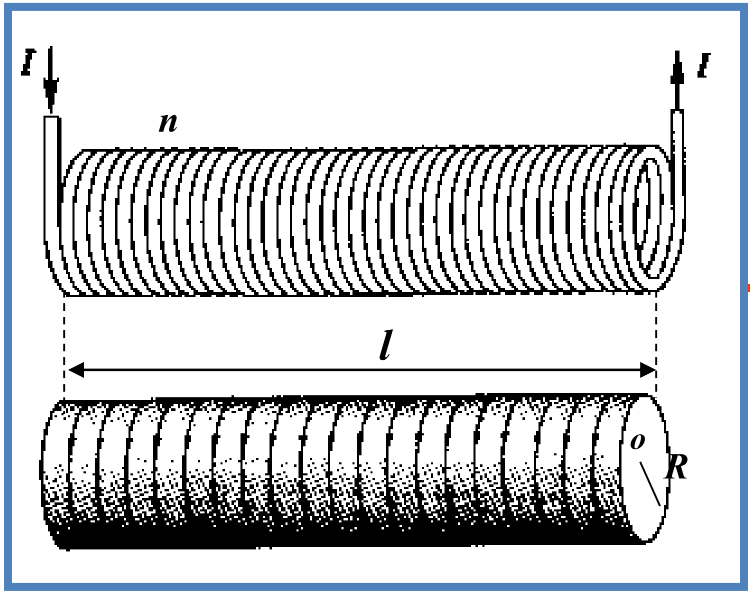
令 $L = 2\pi R$　得 $\boxed{B = \mu_0 NI / L}$

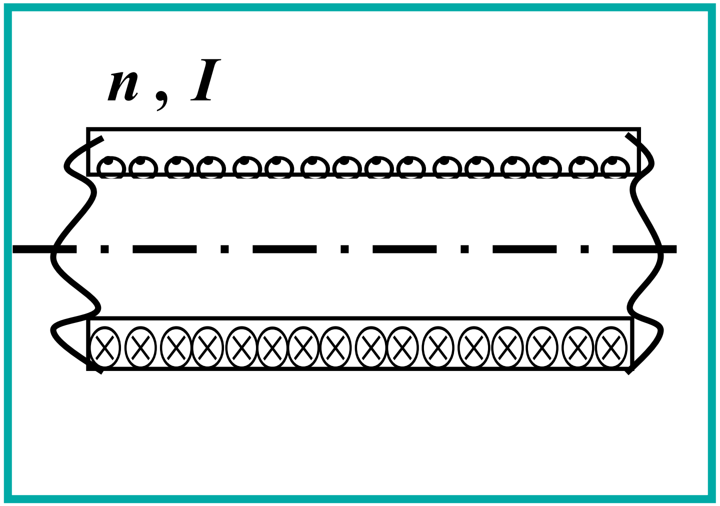
即 $B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi R}$ 当 $2R >> d$ 时，螺绕环内可视为均匀场.

例2 无限长直载流螺线管内磁场（I, n已知，线密绕）。

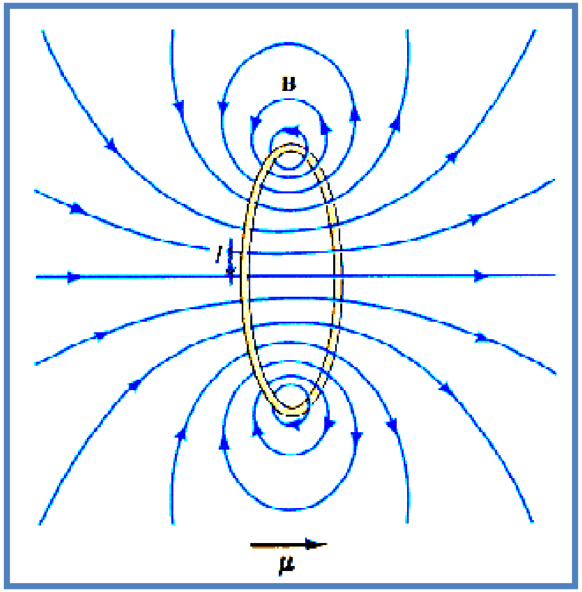
单位长度上的匝数

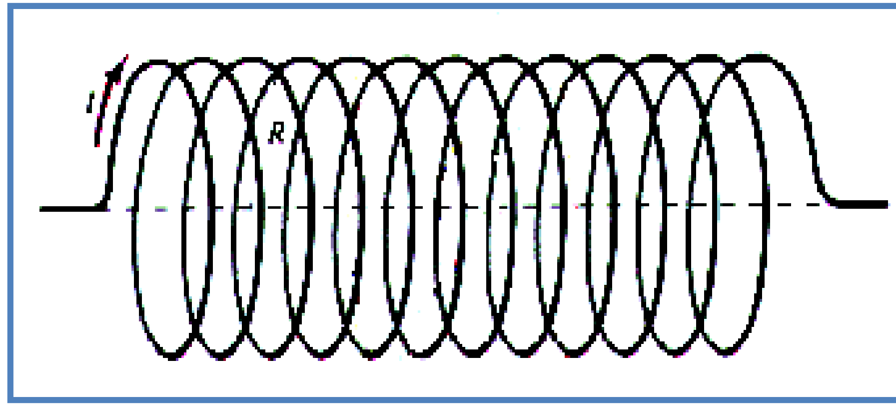
$R << l$，对邻近场点

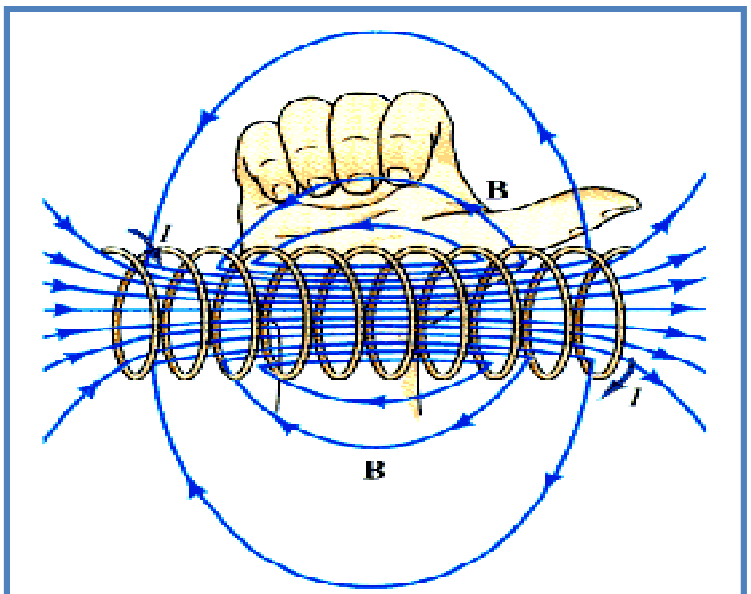




模型：螺距为零，视为一系列平行圆电流紧密排列。

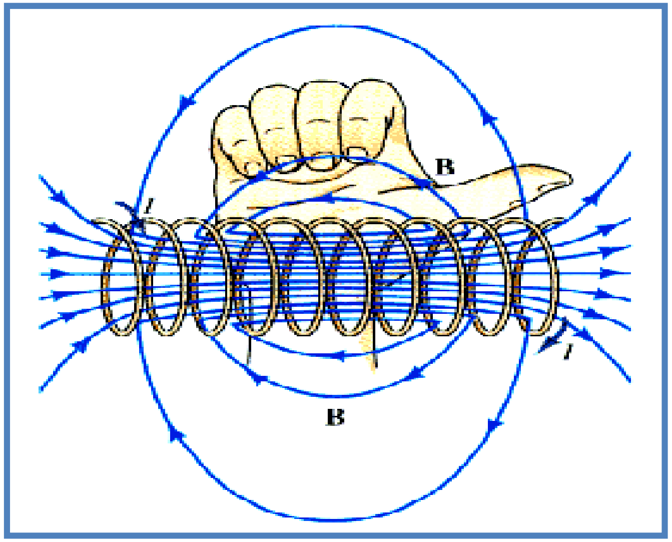


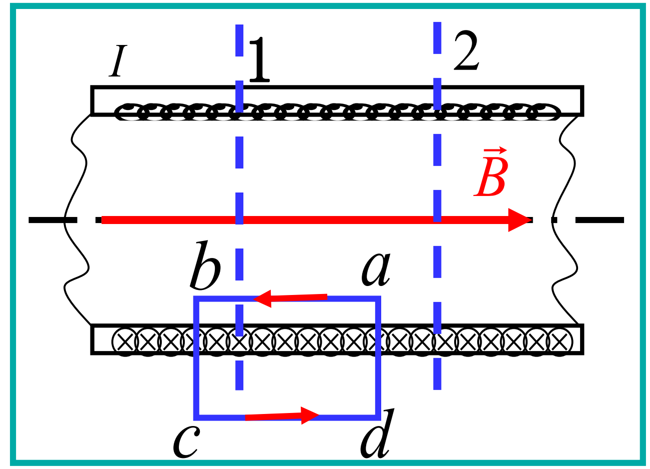




螺线管内只具有沿轴向的相同分量B_x

在螺线管外部 $\mathbf{B}_{外} = 0$





线密绕： $\vec{B}_{外} = 0$ 作矩形安培环路如图，规定 ↶⊕

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \underline{\int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \underline{\int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$= B\cos\pi\ \overline{ab} + 0 + 0 + 0 = -B\,ab$$

$$\sum I_{内} = -nI\,ab$$

由安培环路定律： $-B\,\overline{ab} = -\mu_0 nI\,\overline{ab}$

$$\boxed{B = \mu_0 nI}$$

无限长直螺线管内为均匀磁场

管外磁场几乎为零

例3　无限长载流圆柱体的磁场

分析　1）对称性分析

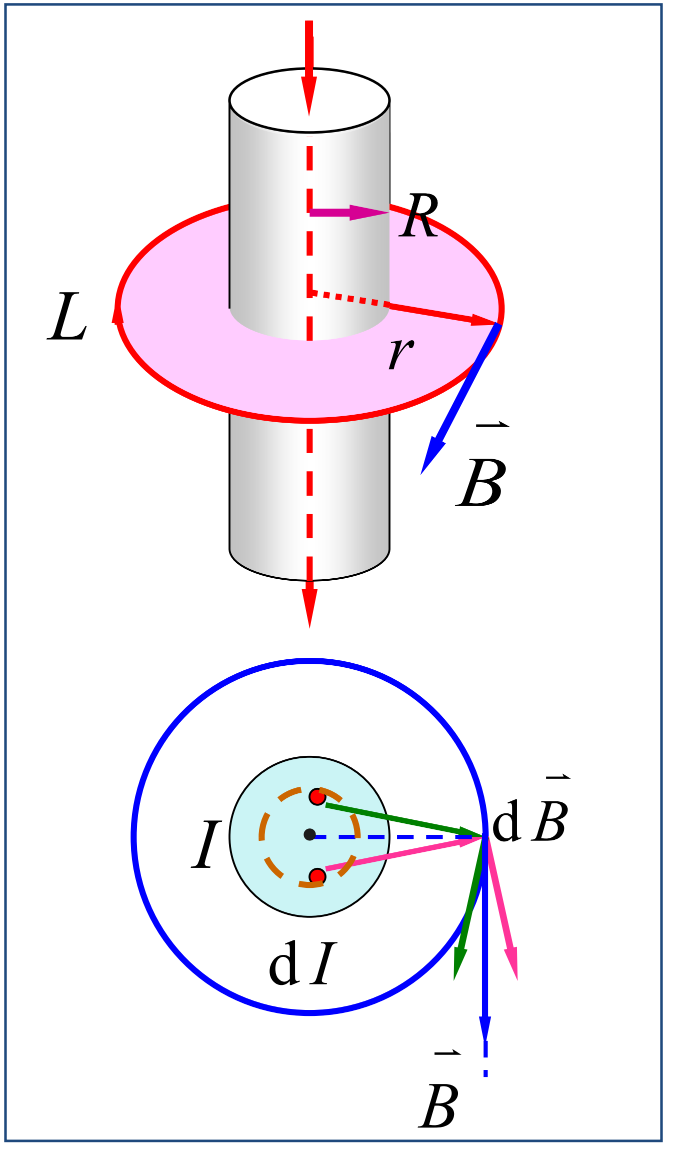
2）选取回路

$r > R \qquad \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$

$$2\pi rB = \mu_0 I \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

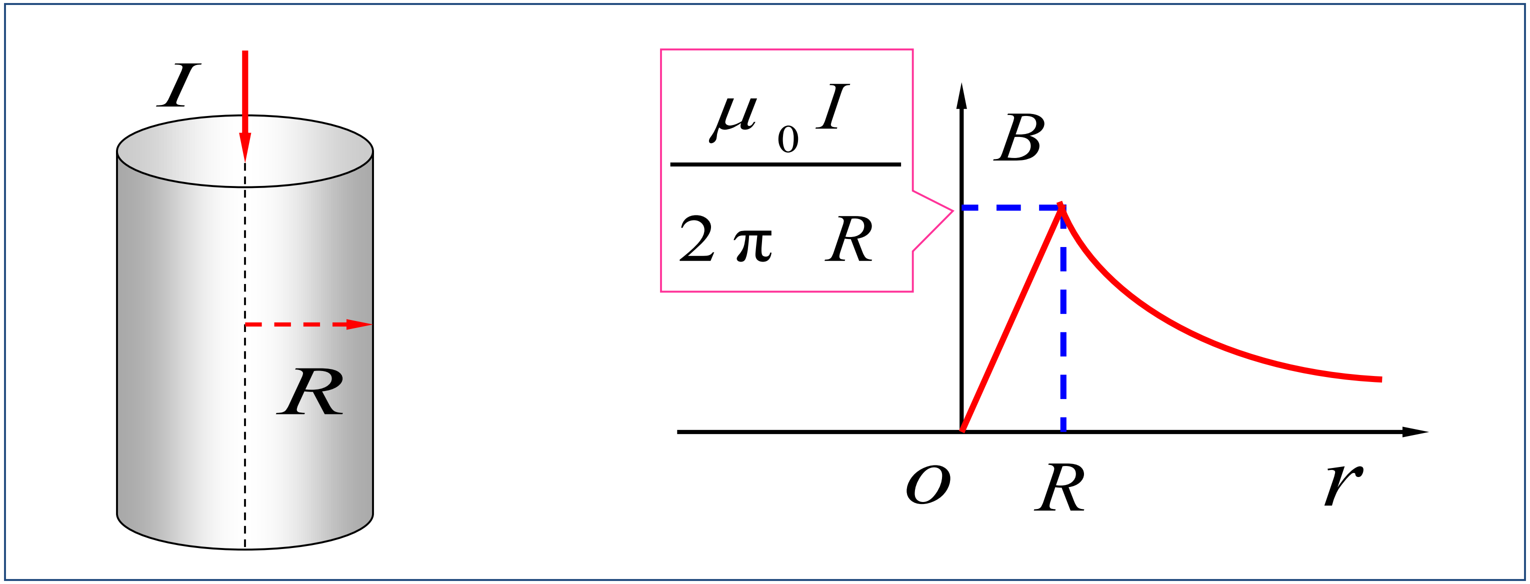
$0 < r < R \qquad \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I$

$$2\pi rB = \frac{\mu_0 r^2}{R^2} I \qquad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

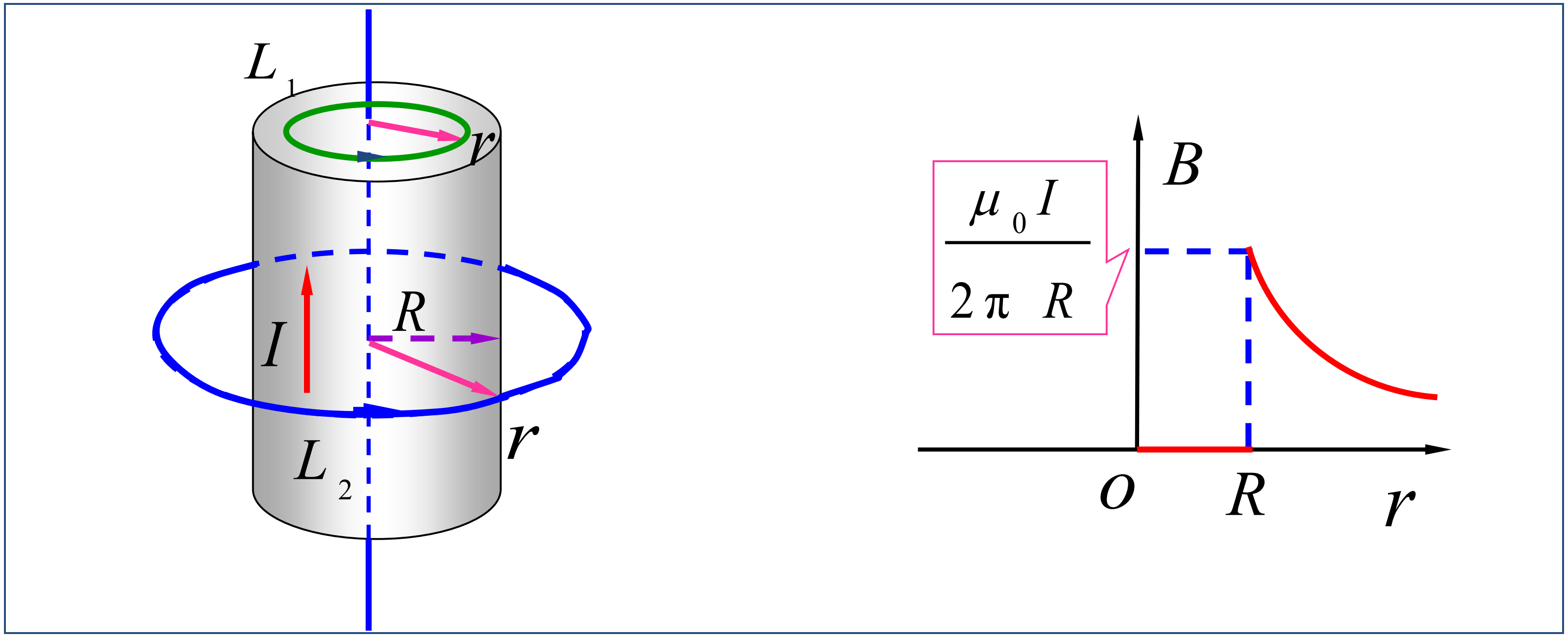


$\vec{B}$ 的方向与 I 成右螺旋

$$\begin{cases} 0 < r < R, & B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\ r > R, & B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$



例4　无限长载流圆柱面的磁场

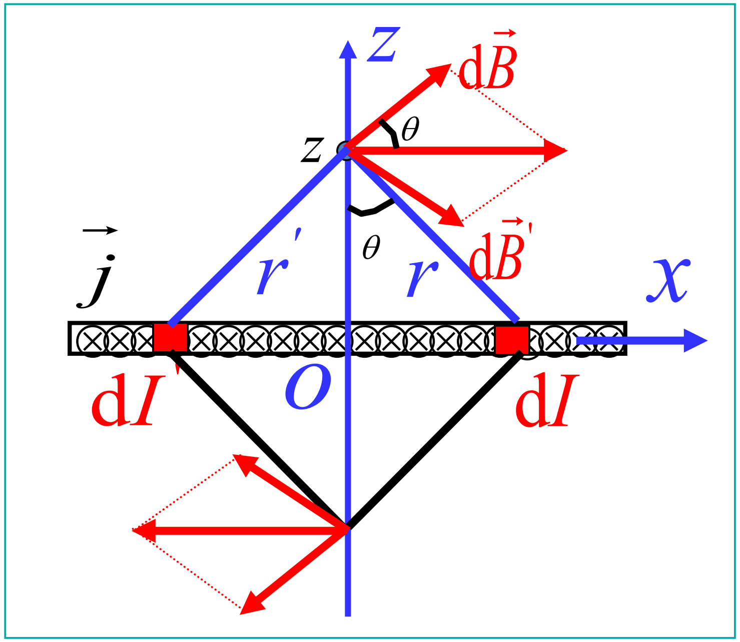


解

$$0 < r < R,\quad \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad B = 0$$

$$r > R,\quad \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

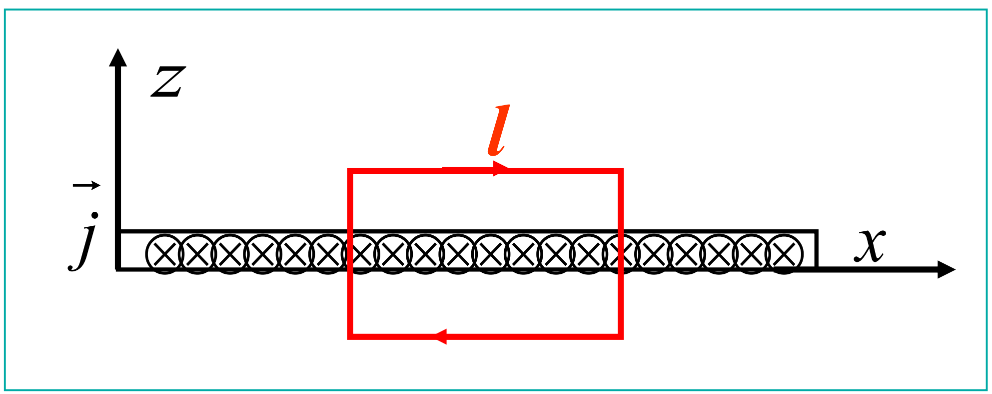
例5 无限大导体平板电流的磁场(电流沿 y 方向，线密度为 $\vec{j}$, 即沿 x 方向单位长度上的电流)。



由对称性：$B_z = \int dB_z = 0$

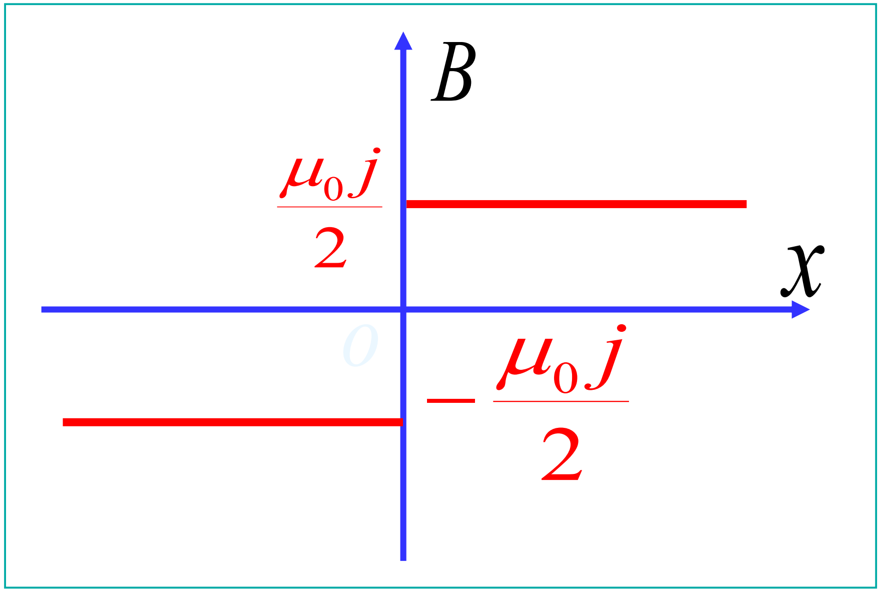
由：$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2lB = \mu_0 jl$

得：$B = \dfrac{\mu_0 j}{2}$



在对称性分析的基础上

选如图安培环路 ⊕



B
$\frac{\mu_0 j}{2}$
x
o
$-\frac{\mu_0 j}{2}$

用安培环路定理解题步骤：

①磁场分布的对称性分析；

②选择恰当的安培环路 L（待求场点必须在 L 上，能把 $\vec{B}$ 提到积分号外，L 的几何形状简单）；

③根据环路定理列方程，并求出 $\sum I_{内}$；

④求出 $\vec{B}$，并说明方向。

作业

- **P123：15; 16; 17.**

版权声明